

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Микишанина Е.А., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-296-308>

УДК 51-72, 517.93



Омниколесная реализация задачи Сулова с реономной связью: динамическая модель и управление

Евгения Арифжановна МИКИШАНИНА

ФГБУН «Математический институт им. В. А. Стеклова» Российской академии наук
119991, Российская Федерация, г. Москва, ул. Губкина, 8
ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова»
428015, Российская Федерация, г. Чебоксары, пр. Московский, 15

Аннотация. Классическая задача Сулова о движении твердого тела с неподвижной точкой достаточно известна и подробно исследована. В данной работе предлагается омниколесная реализация задачи Сулова. Рассматривается управляемое движение твердого тела с неподвижной точкой в присутствии склерономных неголономных связей и реономной искусственной кинематической связи. Твердое тело вращается вокруг неподвижной точки, обкатывает изнутри сферическую оболочку и контактирует с ней посредством омниколеса с дифференциальным приводом. Считаем, что омниколеса контактируют со сферической оболочкой только в одной точке. Чтобы подчинить движение твердого тела искусственной реономной связи, дифференциальный привод создает управляющие крутящие моменты на омниколесах. На основании принципа д'Аламбера–Лагранжа построены уравнения движения системы с неопределенными множителями, задающими реакции связей. Задача сводится к исследованию неавтономной двумерной динамической системы. С помощью преобразования Пуанкаре исследование двумерной динамической системы сводится к исследованию устойчивости однопараметрического семейства неподвижных точек для системы дифференциальных уравнений с вырожденной линейной частью. Определены числовые параметры системы, при которых фазовые траектории ограничены и при которых фазовые траектории неограничены. Результаты исследования проиллюстрированы графически. На основании численного интегрирования построены отображения за период (сечения Пуанкаре) и карта динамических режимов для подтверждения Фейгенбаумовского сценария перехода к хаотической динамике.

Ключевые слова: динамическая модель, управление, задача Сулова, омниколесо, неголономная связь, реономная связь, обратная связь

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-30012, <https://rscf.ru/project/23-71-33002/>).

Для цитирования: *Микишанина Е.А.* Омниколесная реализация задачи Сулова с реономной связью: динамическая модель и управление // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 147. С. 296–308. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-296-308>

SCIENTIFIC ARTICLE

© E. A. Mikishanina, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-296-308>

Omniwheel implementation of the Suslov problem with a rheonomic constraint: dynamic model and control

Evgeniya A. MIKISHANINA

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences

8 Gubkina St., Moscow 119991, Russian Federation

Chuvash State University

15 Moskovskii Av., Cheboksary 428015, Russian Federation

Abstract. The classical Suslov problem of the motion of a rigid body with a fixed point is well known and has been studied in detail. In this paper, an omniwheel implementation of the Suslov problem is proposed. The controlled motion of a rigid body with a fixed point in the presence of scleronomic nonholonomic constraints and rheonomic artificial kinematic constraint is considered. The rigid body rotates around a fixed point, rolls around a spherical shell from the inside and contacts it by means of omniwheels with a differential actuator. We believe that the omniwheels are in contact with the spherical shell only at one point. In order to subordinate the motion of the rigid body to an artificial rheonomic constraint, a differential actuator creates control torques on omniwheels. Based on the d'Alembert–Lagrange principle, equations of motion of the mechanical system with indeterminate multipliers specifying constraint reactions are constructed. The problem is reduced to the study of a non-autonomous two-dimensional dynamical system. Using the generalized Poincaré transformation, the study of a two-dimensional dynamical system is reduced to the study of the stability of a one-parameter family of fixed points for a system of differential equations with a degenerate linear part. We determine numerical parameters for which phase trajectories of the system are bounded and for which phase trajectories of the system are unbounded. The results of the study are illustrated graphically. Based on numerical integration, maps for the period (Poincaré sections) and a map of dynamic regimes are constructed to confirm the Feigenbaum scenario of transition to chaotic dynamics.

Keywords: dynamic model, control, Suslov problem, omniwheel, nonholonomic constraint, rheonomic constraint, feedback

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-71-30012, <https://rscf.ru/project/23-71-33002/>).

Mathematics Subject Classification: 37N15, 70K45, 70Q05.

For citation: Mikishanina E.A. Omniwheel implementation of the Suslov problem with a rheonomic constraint: dynamic model and control. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:147 (2024), 296–308.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-296-308> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Данная работа посвящена исследованию динамики твердого тела с неподвижной точкой в задаче Суслова. Твердое тело движется в присутствии неоднородной реономной связи Суслова. Физическая интерпретация однородной склерономной неголономной связи Суслова [1, с. 593] была предложена Вагнером [2] (рис. 1). Твердое тело движется внутри сферической оболочки и контактирует с ней посредством «острых» колесиков (рис. 1), в результате чего возникает неголономная связь Суслова

$$(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}) = 0,$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости тела, \mathbf{e} — вектор, неподвижный в теле.

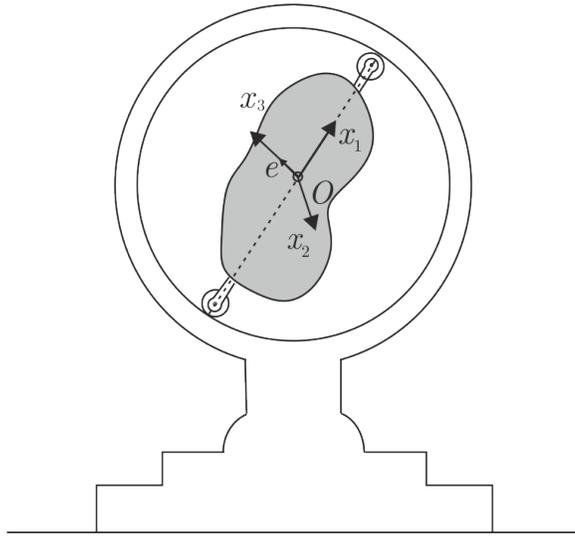


Рис. 1. Физическая реализация Вагнера задачи Суслова

Динамика классической задачи Суслова, в том числе с переменными параметрами (обобщение задачи Суслова), хорошо изучена в работах [3–5]. В работе [3] авторы исследуют динамику системы Суслова с неоднородной склерономной неголономной связью

$$(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}) = \text{const},$$

однако, физическую интерпретацию этой связи авторы не указывают.

Обобщением склерономной связи Суслова является реономная связь Билимовича [6]. Билимович предложил физическую интерпретацию реономной неголономной связи

$$(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{a}) = \alpha,$$

где $\mathbf{a} = (1, p(t), 0)$, $p(t)$ — произвольная функция, α — произвольная постоянная, в виде механизма с вращающимся стержнем [6]. Однако данная физическая интерпретация не совсем корректна. Найти физическую реализацию неоднородной склерономной связи Суслова также сложно. Динамика низкоразмерной неавтономной динамической системы в задаче Билимовича достаточно подробно была исследована в [7]. На основе численных экспериментов были выявлены случаи, когда одна из фазовых переменных или обе фазовые переменные неограничены. Для фазовых переменных в этих случаях были найдены асимптотики эмпирически.

В данной работе мы предложим омниколесную реализацию задачи Суслова. Для этого в механической системе Вагнера (рис. 1) заменим острые колесики на омниколеса с дифференциальным приводом. Управляя крутящим моментом на омниколесах, мы подчиним движение твердого тела реономной связи

$$(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}) = f(t).$$

Однако данную связь нельзя считать неголономной, так как неголономные связи реализуются естественным путем вследствие контакта. Данная связь искусственная. Такие связи часто называют условными связями (сервосвязями) [8–10]. Для ее реализации требуются управляющие воздействия. В данном случае управляющие воздействия — это управляющие крутящие моменты на омниколесах, зависящие от искомым механических параметров. Таким образом, получаем задачу с обратной связью.

В работе для заданных управляющих моментов на омниколесах строятся уравнения движения на основе принципа д'Аламбера–Лагранжа, исследуется динамика системы, для чего строятся отображения Пуанкаре, которые могут содержать странные хаотические аттракторы. В случае появления хаотического аттрактора мы строим карту динамических режимов и показываем сценарий Фейгенбаума перехода к хаосу посредством каскада бифуркаций удвоения периода. В исследуемой динамической системе может наблюдаться неограниченный рост фазовых переменных. В работе приводится аналитическое доказательство этого факта с использованием преобразования Пуанкаре [11, с. 107], в результате которого мы переходим к исследованию устойчивости однопараметрического семейства неподвижных точек для системы с вырожденной линейной частью [12, 13]. Причем, в отличие от [12], у нас нет необходимости прибегать к нормальным формам. Определяются механические параметры системы, при которых наблюдается неограниченный рост фазовой переменной, и строятся асимптотики фазовых переменных, а также оцениваются управляющие крутящие моменты на омниколесах.

Другие качественные методы исследования динамического поведения нелинейной системы и методы управления представлены в [14, 15].

1. Математическая модель

Постановка задачи. Рассмотрим неподвижную сферическую оболочку радиуса R , внутри которой движется твердое тело массой M с неподвижной точкой O , совпадающей с центром оболочки и центром масс самого тела (рис. 1). Твердое тело контактирует с оболочкой посредством двух одинаково ориентированных омниколес радиуса r и массой m , расположенных диаметрально противоположно. Считаем, что каждое омниколесо контактирует с оболочкой только в одной точке.

Введем подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с центром в точке O , жестко связанную с телом. Направим ось Ox_3 перпендикулярно плоскости омниколес. Тогда ось, соединяющая центры омниколес, лежит в плоскости Ox_1x_2 . Предполагаем, что геометрические и физические параметры системы и выбор осей системы координат таковы, что осевой момент инерции омниколеса равен j , а тензор инерции твердого тела вместе с омниколесами принимает вид

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}.$$

Неголономные условия непроскальзывания омниколес в точках контакта со сферической оболочкой принимают вид

$$(\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i) \cdot \dot{\chi}_i + \frac{R}{r}(\mathbf{s}_i, \boldsymbol{\omega}) = 0, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (1.1)$$

где $\dot{\chi}_i$ — угловая скорость i -го омниколеса, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ — вектор угловой скорости тела, $\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_i$, вектор \mathbf{n}_i — единичный вектор, нормальный к плоскости омниколеса, вектор \mathbf{a}_i — единичный вектор, направленный вдоль оси ролика, контактирующего с оболочкой, \mathbf{r}_i — радиус-вектор, направленный от центра сферы до центра i -го омниколеса. Более подробно с неголономной моделью омниколеса можно ознакомиться в [16] (конструкцию омниколеса см. рис. 2).

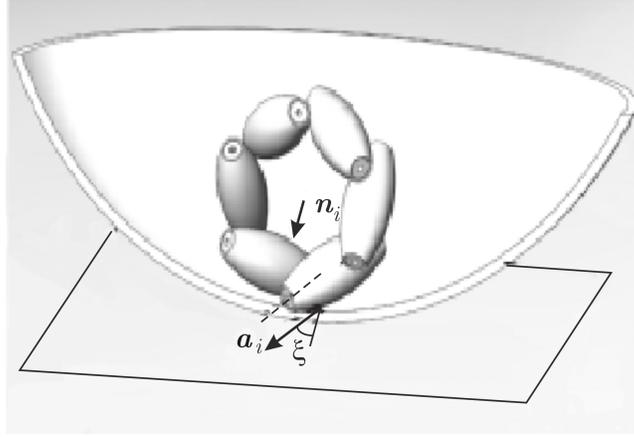


Рис. 2. Конструкция омниколеса

Векторы $\mathbf{a}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{s}_i$ в системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеют следующие координаты

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} (R-r) \cos \varphi \\ (R-r) \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \sin \xi \\ \cos \varphi \sin \xi \\ \cos \xi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} (R-r) \sin \varphi \cos \xi \\ -(R-r) \cos \varphi \cos \xi \\ (R-r) \sin \xi \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -(R-r) \cos \varphi \\ -(R-r) \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \sin \varphi \sin \xi \\ -\cos \varphi \sin \xi \\ \cos \xi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} -(R-r) \sin \varphi \cos \xi \\ (R-r) \cos \varphi \cos \xi \\ (R-r) \sin \xi \end{pmatrix},$$

где угол $\xi \neq 0, \pi$ — угол между осью ролика и нормалью к плоскости омниколеса, угол φ — угол, между осью, соединяющей центры омниколес и положительным направлением оси Ox_1 .

З а м е ч а н и е 1.1. В случаях $\xi = 0$ и $\xi = \pi$ неголономные условия приобретают вид классических неголономных условий Сулова для твердого тела на «острых» колесах.

Потребуем, чтобы движение твердого тела подчинялось искусственной связи

$$(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}) = f(t), \quad (1.2)$$

где $\mathbf{e} = (0, 0, 1)^T$ — координатный вектор оси Ox_3 , $f(t)$ — заданная периодическая функция времени t . Для реализации условия (1.2) на каждое i -е омниколесо установим дифференциальный привод, который будет генерировать управляющий крутящий момент K_i .

Требуется оценить возможность физической реализации такого движения и исследовать динамику системы.

Уравнения движения. Лагранжиан системы имеет вид

$$L = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}j(\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_2^2) + j((\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}_1)\dot{\chi}_1 + (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}_2)\dot{\chi}_2).$$

Уравнения движения с неопределенными множителями для твердого тела строятся аналогично уравнениям движения в [17]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma} + \frac{R}{r} \left(\mu_1 \frac{\mathbf{s}_1}{(\mathbf{s}_1, \mathbf{n}_1)} + \mu_2 \frac{\mathbf{s}_2}{(\mathbf{s}_2, \mathbf{n}_2)} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_1} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_1} + \mu_1 + K_1, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_2} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_2} + \mu_2 + K_2, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор абсолютного пространства, направленный вдоль силы тяжести, μ_1, μ_2 — неопределенные множители, задающие реакцию неголономных связей, K_1, K_2 — моменты сил, приложенных к осям омниколес. Так как центр масс твердого тела совпадает с центром системы координат $Ox_1x_2x_3$, то, отбросив последнее векторное уравнение (1.3), можно перейти к исследованию системы

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q} \\ j\ddot{\chi}_1 + j\dot{\omega}_3 &= \mu_1 + K_1, \\ j\ddot{\chi}_2 + j\dot{\omega}_3 &= \mu_2 + K_2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\text{где } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{23} & I_{33} - \frac{2jR}{r} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \frac{R}{r} \begin{pmatrix} \sin \varphi \operatorname{ctg} \xi (\mu_1 - \mu_2) \\ -\cos \varphi \operatorname{ctg} \xi (\mu_1 - \mu_2) \\ \mu_1 + \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Неопределенные множители определяем из совместного решения уравнений движения и производных по времени от уравнений (1.1), а моменты сил, приложенные к осям, находим из уравнения, являющегося производной по времени от искусственной связи (1.2). Неопределенные множители μ_1, μ_2 как функции от K_1 и K_2 определяются единственным образом, а вот моменты K_1, K_2 определяются уже не единственным образом, так как одного уравнения (1.2) недостаточно. Таким образом, накладывая дополнительное условие на моменты или на систему, можно получить систему с самой разнообразной динамикой.

Потребуем, чтобы $Q_1 = Q_2 = 0$, то есть $\mu_1 = \mu_2$. Тогда управляющие крутящие моменты на омниколесах примут вид:

$$\begin{aligned} K_{1,2} &= \mp \frac{jR \operatorname{ctg} \xi \cos \varphi}{rI_{22}} \left[(I_{11} - I_{33}) f(t)\omega_1 + I_{23} (\dot{f}(t) - \omega_1\omega_2) \right] \\ &\mp \frac{jR \operatorname{ctg} \xi \sin \varphi}{rI_{11}} \left[(I_{22} - I_{33}) f(t)\omega_2 + I_{23} (f(t)^2 - \omega_2^2) \right] \\ &- \frac{r}{2RI_{22}} \left[(I_{22} - I_{11})\omega_1 (I_{22}\omega_2 + I_{23}f(t)) + I_{23}\omega_1 (I_{23}\omega_2 + I_{33}f(t)) \right] \\ &- \frac{1}{2I_{22}} \left[2I_{22}j \left(\frac{R}{r} - 1 \right) + \frac{r(I_{22}I_{33} - I_{23}^2)}{R} \right] \dot{f}(t). \end{aligned}$$

Тогда система (1.4) и задача в целом сводится к исследованию системы для двух компонент угловой скорости ω_1 и ω_2 :

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= -\frac{I_{23}}{I_{11}}\omega_2^2 + \frac{I_{22} - \tilde{I}_{33}}{I_{11}}f(t)\omega_2 + \frac{I_{23}}{I_{11}}f(t)^2, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{I_{23}}{I_{22}}\omega_1\omega_2 - \frac{I_{11} - \tilde{I}_{33}}{I_{22}}f(t)\omega_1 - \frac{I_{23}}{I_{22}}\dot{f}(t),\end{aligned}\tag{1.5}$$

где $\tilde{I}_{33} = I_{33} - 2j\frac{R}{r}$.

В случае $\varphi = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ или $\xi = \frac{\pi}{2}$ аналогичная система получится, если в качестве дополнительного условия выбрать равенство управляющих крутящих моментов на колесах, то есть $K_1 = K_2$.

Управляющие крутящие моменты зависят от значений угловых скоростей ω_1, ω_2 . При неограниченном поведении хотя бы одной из компонент управляющие крутящие моменты также будут неограничены, что сделает невозможной физическую реализацию задачи, начиная с некоторого момента времени.

При $I_{23} = 0$ для фазовых переменных системы имеет место первый интеграл

$$\frac{I_{11} - \tilde{I}_{33}}{I_{22}}\omega_1^2 + \frac{I_{22} - \tilde{I}_{33}}{I_{11}}\omega_2^2 = \text{const},$$

и решение может быть найдено явным интегрированием. При

$$(I_{11} - \tilde{I}_{33})(I_{22} - \tilde{I}_{33}) > 0$$

обе фазовые переменные являются ограниченными функциями. Физическая реализация возможна. В противном случае динамика системы зависит от вида функции $f(t)$.

Перейдем к исследованию поведения системы в случае $I_{23} \neq 0$.

2. Исследование динамики системы при $I_{23} \neq 0$

Введем замену

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{I_{22}}{I_{23}}v, \\ \omega_2 &= \frac{I_{11} - \tilde{I}_{33}}{I_{23}}f(t) + \frac{\sqrt{I_{11}I_{22}}}{I_{23}}u.\end{aligned}$$

В новых переменных система (1.5) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{v} &= u^2 + af(t)u + bf(t)^2, \\ \dot{u} &= -uv - c\dot{f}(t),\end{aligned}\tag{2.1}$$

где

$$a = \frac{(I_{11} - I_{22}) + (I_{11} - \tilde{I}_{33})}{\sqrt{I_{11}I_{22}}}, \quad b = \frac{(I_{11} - I_{22})(I_{11} - \tilde{I}_{33}) - I_{23}^2}{I_{11}I_{22}}, \quad c = \frac{I_{22}(I_{11} - \tilde{I}_{33}) + I_{23}^2}{I_{22}\sqrt{I_{11}I_{22}}}.$$

Фазовое пространство системы (2.1) двумерно.

Преобразование Пуанкаре и неограниченность фазовых траекторий. Введем угловую переменную $\tau = t \bmod T$, где T — наименьший общий период функций $f(t)$, $f(t)^2$, $\dot{f}(t)$, $\tau \in [0, T)$, и перепишем систему (2.1) в автономном виде

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= u^2 + af(\tau)u + bf(\tau)^2, \\ \frac{du}{dt} &= -uv - c\frac{df(\tau)}{d\tau}, \\ \frac{d\tau}{dt} &= 1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Считаем, что $v > 0$. Используем преобразование Пуанкаре, которое переводит бесконечно удаленные точки фазовой плоскости в неподвижные точки сферы Пуанкаре [11],

$$v = \frac{1}{x}, \quad u = \frac{y}{x},$$

масштабируем время $ds = vdt$ и переписываем систему (2.2) в переменных x, y :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= -xy^2 - af(\tau)x^2y - bf(\tau)^2x^3, \\ \frac{dy}{ds} &= -y - c\frac{df(\tau)}{d\tau}x^2 - y^3 - af(\tau)xy^2 - bf(\tau)^2x^2y, \\ \frac{d\tau}{ds} &= x. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Фазовое пространство системы (2.3) уже трехмерно. Эта система обладает семейством неподвижных точек

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \tau = \tau^*, \quad (2.4)$$

где τ^* — любое из области определения. Для анализа их устойчивости определяем собственные числа матрицы системы, линеаризованной в окрестности (2.4). Одно из собственных чисел матрицы линеаризованной системы равно -1 , а другие собственные числа равны нулю. Таким образом, требуется учет членов разложения более высоких порядков.

Согласно [14, 18] в окрестности неподвижной точки (2.4) существует центральное инвариантное многообразие, на котором $0 < x < \varepsilon$, $\tau \bmod T$, а функция y представима в виде ряда по степеням x :

$$y = \beta_2(\tau)x^2 + \beta_3(\tau)x^3 + O(x^4). \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) во второе уравнение (2.3), получим

$$y = -c\frac{df(\tau)}{d\tau}x^2 + c\frac{d^2f(\tau)}{d\tau^2}x^3 + O(x^4), \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в первое уравнение (2.3), получим

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \alpha_3(\tau)x^3 + \alpha_4(\tau)x^4 + \alpha_5(\tau)x^5 + O(x^6), \\ \alpha_3(\tau) &= -b \cdot f(\tau)^2, \\ \alpha_4(\tau) &= a \cdot c \cdot f(\tau) \cdot \frac{df(\tau)}{d\tau}, \\ \alpha_5(\tau) &= -c^2 \left(\frac{df(\tau)}{d\tau} \right)^2 - a \cdot c \cdot f(\tau) \cdot \frac{d^2f(\tau)}{d\tau^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Пусть $x \ll 1$. Разделим уравнение (2.7) на третье уравнение (2.3):

$$\frac{dx}{d\tau} = \alpha_3(\tau)x^2 + \alpha_4(\tau)x^3 + \alpha_5(\tau)x^4 + O(x^5)$$

и выполним преобразование для усреднения коэффициентов:

$$\frac{dx}{dt} = \langle \alpha_3 \rangle x^2 + \langle \alpha_4 \rangle x^3 + \langle \alpha_5 \rangle x^4 + O(x^5),$$

где

$$\langle \alpha_i \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha_i(\tau) d\tau.$$

Согласно [18], если $b > 0$, то $\langle \alpha_3 \rangle < 0$ и точки (2.4) асимптотически устойчивы. Если $b < 0$, то $\langle \alpha_3 \rangle > 0$ и точки (2.4) неустойчивы.

Пусть $b = 0$. Так как $I_{23} \neq 0$, то $c \neq 0$. Тогда

$$\langle \alpha_3 \rangle = 0, \quad \langle \alpha_4 \rangle = \frac{1}{T} \cdot a \cdot c \int_0^T f(\tau) df(\tau) = 0.$$

Перепишем $\alpha_5(\tau)$ в виде

$$\alpha_5(\tau) = - (c^2 - a \cdot c) \left(\frac{df(\tau)}{d\tau} \right)^2 - a \cdot c \cdot \frac{d}{d\tau} \left(f(\tau) \frac{df(\tau)}{d\tau} \right).$$

Так как $f(\tau)$ и $\frac{df(\tau)}{d\tau}$ являются T -периодическими функциями, то

$$\int_0^T d \left(f(\tau) \frac{df(\tau)}{d\tau} \right) = 0.$$

Легко проверить, что если $b = 0$, то $c^2 - a \cdot c < 0$. Если $f(t)$ — не постоянная функция, то $\langle \alpha_5 \rangle > 0$. Это значит, что, согласно [18], точки (2.4) неустойчивы при $b = 0$.

В случае $b > 0$ имеем на центральном инвариантном многообразии следующие асимптотики для x, y при $t \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} x(t) &= (b \langle f^2 \rangle t)^{-1} + o(t^{-1}), \\ y(t) &= -c \dot{f}(t) (b \langle f^2 \rangle t)^{-2} + o(t^{-2}), \end{aligned}$$

где

$$\langle f^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt.$$

Возвращаясь к переменным v, u , можно сделать следующий вывод без строгих математических доказательств.

Существует $\varepsilon > 0$ такое, что для начального условия $v(0) > \varepsilon^{-1}$ и $b > 0$ имеют место следующие асимптотики фазовых переменных системы (2.1) при $t \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} v(t) &= b \langle f^2 \rangle t + o(t), \\ u(t) &= -c \dot{f}(t) (b \langle f^2 \rangle t)^{-1} + o(t^{-1}). \end{aligned}$$

Перейдем к исходным переменным ω_1, ω_2 и сформулируем следующее утверждение.

Предложение 2.1. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что для начального значения $\omega_1(0)$, удовлетворяющего условию $-I_{23}I_{22}^{-1}\omega_1(0) > \varepsilon^{-1} > 0$, и для параметров системы (1.5), удовлетворяющих условию

$$\frac{(I_{11} - I_{22})(I_{11} - \tilde{I}_{33}) - I_{23}^2}{I_{11}I_{22}} > 0,$$

имеют место следующие асимптотики фазовых переменных системы (1.5) при $t \rightarrow +\infty$:

$$\omega_1(t) = -\frac{(I_{11} - I_{22})(I_{11} - \tilde{I}_{33}) - I_{23}^2}{I_{11}I_{23}} \langle f^2 \rangle t + o(t), \quad \omega_2(t) \sim \frac{I_{11} - \tilde{I}_{33}}{I_{23}} f(t),$$

причем

- если $I_{23} > 0$, то $\omega_1 \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +\infty$;
- если $I_{23} < 0$, то $\omega_1 \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

3. Численные эксперименты

Проиллюстрируем аналитические результаты для случая

$$f(t) = \sin t,$$

используя методы численного интегрирования.

На рис. 3 изображены отображения за период (сечение Пуанкаре) для системы (1.5) с заданным тензором инерции

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3 & I_{23} \\ 0 & I_{23} & 1.8 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

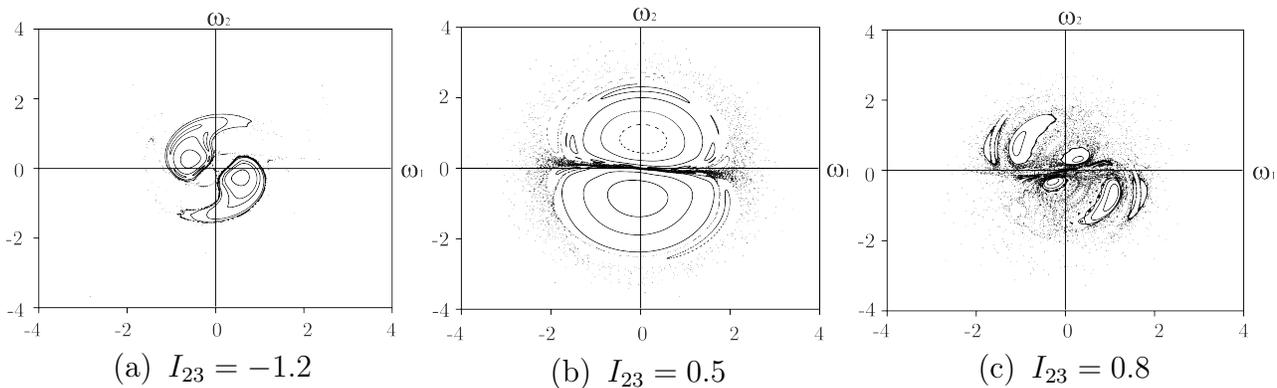


Рис. 3. Отображения за период системы (1.5) с тензором инерции (3.1)

Эти отображения соответствуют случаю $b < 0$.

На рис. 4 изображены отображения за период (сечение Пуанкаре) для системы (1.5) с заданным тензором инерции

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1.3 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & I_{23} \\ 0 & I_{23} & 1.8 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

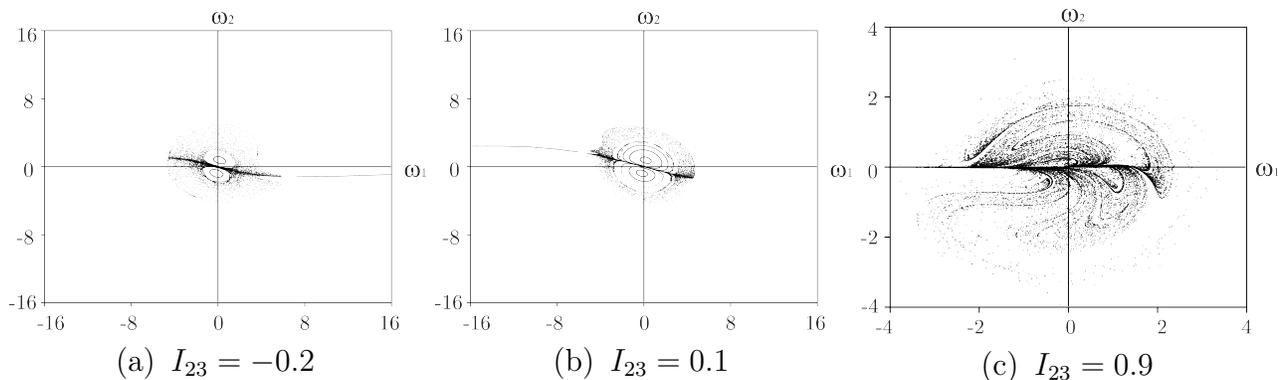


Рис. 4. Отображения за период системы (1.5) с тензором инерции (3.2)

Рис. 4 (а) и (b) соответствуют случаю $b > 0$. Области начальных условий системы (1.5) разделяются на две подобласти (рис. 5). Если начальные условия относятся к внешней подобласти, фазовая кривая не ограничена и убегает в «бесконечность». Если начальные условия относятся к внутренней подобласти, фазовая кривая ограничена.

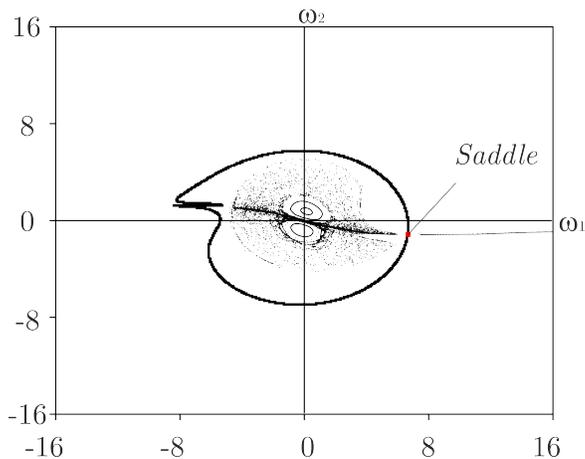


Рис. 5. Разделение области начальных условий

Рис. 4 (с) соответствует случаю $b < 0$ и содержит странный аттрактор с показателями Ляпунова

$$\lambda_1 \approx 0.073, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \approx -0.106.$$

Старший показатель Ляпунова положителен, а сумма показателей Ляпунова отрицательна. Это подтверждает, что на рис. 4 (с) изображен странный аттрактор.

На рис. 6 представлена карта динамических режимов на плоскости параметров (I_{23}, \tilde{I}_{33}) , где параметры лежат в интервалах $I_{23} \in [0.7, 1]$ и $\tilde{I}_{33} \in [1.6, 1.9]$. Области черного цвета с цветными включениями соответствуют параметрам системы со странным аттрактором. Подтверждается сценарий Фейгенбаума о появлении странного аттрактора в результате каскада бифуркаций удвоения периода.

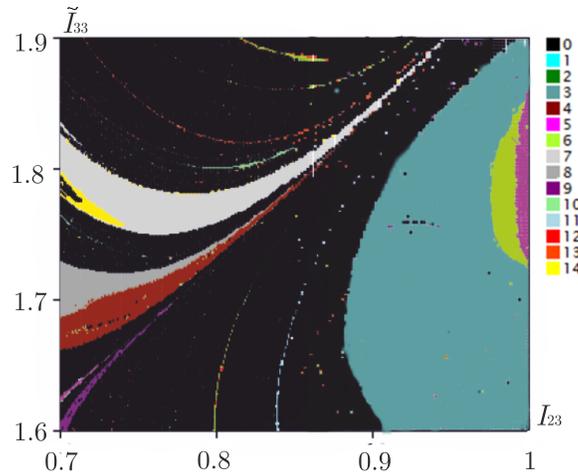


Рис. 6. Карта динамических режимов на плоскости (I_{23}, \tilde{I}_{33})

4. Заключение

Результаты, полученные в данном исследовании аналитически, согласуются с результатами, полученными эмпирически в [7]. Найдены механические параметры твердого тела, для которых модуль угловой скорости тела (а следовательно, и модули угловых скоростей омниколес) будет неограниченно возрастать. Показано, что управляющие крутящие моменты на омниколесах могут быть заданы не единственным образом. Следовательно, задавая управляющие крутящие моменты на омниколесах другим образом, может быть получена система с абсолютно другой динамикой.

References

- [1] Г. К. Суслов, *Теоретическая механика*, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1946. [G. K. Suslov, *Theoretical mechanics*, Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, 1946 (In Russian)].
- [2] В. Вагнер, “Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем”, *Труды семинара по векторному и тензорному анализу*, 1941, № 5, 301–327. [V. Vagner, “Geometric interpretation of the motion of nonholonomic dynamical systems”, *Proceedings of the Seminar on Vector and Tensor Analysis*, 1941, № 5, 301–327 (In Russian)].
- [3] L. C. Garcia-Naranjo, A. J. Maciejewski, J. C. Marrero, M. Przybylska, “The inhomogeneous Suslov problem”, *Physics Letters A*, **378**:32–33 (2013), 2389–2394.
- [4] A. V. Borisov, E. A. Mikishanina, “Two nonholonomic chaotic systems. Part I. On the Suslov problem”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **25**:3 (2020), 313–322.
- [5] A. V. Borisov, I. S. Mamaev, A. A. Kilin, “Hamiltonicity and integrability of the Suslov problem”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **16**:1–2 (2011), 104–116.
- [6] A. D. Bilimovitch, “Sur les systemes conservatifs, non holonomes avec des liaisons dependantes du temps”, *Comptes rendus de l’Académie des Sciences*, **156** (1913), 12–18.
- [7] A. V. Borisov, A. V. Tsiganov, E. A. Mikishanina, “On inhomogeneous nonholonomic Bilimovich system”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **94** (2021), 105573.
- [8] В. И. Киргетов, “О движении управляемых механических систем с условными связями (сервосвязями)”, *Прикладная математика и механика*, **31**:3 (1967), 433–446; англ. пер.: V. I. Kirgetov, “The motion of controlled mechanical systems with prescribed constraints (servoconstraints)”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **31**:3 (1967), 465–477.
- [9] Е. А. Микишанина, “Динамика качения сферического робота с маятниковым приводом, управляемого сервосвязью Билимовича”, *Теоретическая и математическая физика*, **211**:2 (2022), 281–294; англ. пер.: E. A. Mikishanina, “Rolling motion dynamics of a spherical robot with a pendulum actuator controlled by the Bilimovich servo-constraint”, *Theoretical and Mathematical Physics*, **211**:2 (2022), 679–691.

- [10] V. V. Kozlov, “The dynamics of systems with servoconstraints. I”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **20:3** (2015), 205–224.
- [11] Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович, *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*, Наука, М., 1990. [N. N. Bautin, E. A. Leontovich, *Methods and Techniques of Qualitative Research of Dynamical Systems on a Plane*, Nauka Publ., Moscow, 1990 (In Russian)].
- [12] I. Bizyaev, S. Bolotin, I. Mamaev, “Normal forms and averaging in an acceleration problem in nonholonomic mechanics”, *Chaos*, **31:1** (2021), 013132.
- [13] Е. А. Микишанина, “The problem of acceleration in the dynamics of a double-link wheeled vehicle with arbitrarily directed periodic excitation”, *Theoretical and Applied Mechanics*, **50:2** (2023), 205–221.
- [14] L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. V. Turaev, L. O. Chua, *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2001.
- [15] В. Р. Барсегян, Т. А. Симонян, А. Г. Матевосян, “Об одной задаче управления квадрокоптером с заданными промежуточными значениями разных частей координат”, *Вестник российских университетов. Математика*, **29:145** (2024), 29–42. [V. R. Barseghyan, T. A. Simonyan, A. G. Matevosyan, “On one problem of quadcopter control with given intermediate values of different parts of coordinates”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29:145** (2024), 29–42 (In Russian)].
- [16] А. А. Килин, Ю. Л. Караваев, “Кинематическая модель управления сферороботом с неуравновешенной омниколесной платформой”, *Нелинейная динамика*, **10:4** (2014), 497–511. [A. A. Kilin, Yu. L. Karavaev, “The kinematic control model for a spherical robot with an unbalanced internal omniwheel platform”, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, **10:4** (2014), 497–511 (In Russian)].
- [17] А. А. Килин, Ю. Л. Караваев, “Динамика сфероробота с внутренней омниколесной платформой”, *Нелинейная динамика*, **11:1** (2015), 187–204. [A. A. Kilin, Yu. L. Karavaev, “The dynamic of a spherical robot with an internal omniwheel platform”, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, **11:1** (2015), 187–204 (In Russian)].
- [18] J. Carr, *Applications of Centre Manifold Theory*, Springer–Verlag, New York, 1981.

Информация об авторе

Микишанина Евгения Арифжановна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела механики, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва; доцент кафедры актуарной и финансовой математики, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Российская Федерация. E-mail: evaeva_84@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4408-1888>

Поступила в редакцию 23.05.2024 г.
 Поступила после рецензирования 05.09.2024 г.
 Принята к публикации 13.09.2024 г.

Information about the author

Evgeniya A. Mikishanina, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher of the Mechanics Department, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow; Associate Professor of the Actuarial and Financial Mathematics Department, Chuvash State University, Cheboksary, Russian Federation. E-mail: evaeva_84@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4408-1888>

Received 23.05.2024
 Reviewed 05.09.2024
 Accepted for press 13.09.2024